

基于接触有限元的齿轮副扭转共振分析

范俊¹, 王建军¹, 张涛¹, 肖阳², 陈策²

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;

2. 陆航研究所 机体发动机室, 北京 101121)

摘 要: 以典型斜齿轮副为对象, 基于接触有限元法, 先模拟其准静态啮合过程并求解啮合刚度, 并与国家标准偏差值进行了对比, 证明了分析方法的正确性。再模拟其动态啮合过程, 通过对啮合力响应进行频谱分析识别出扭转振动的固有频率, 并与绘制频响曲线的识别结果一致。在此基础上, 数值模拟了该齿轮副扭转共振的发生、发展和稳定过程, 定量分析了共振状态下的典型动力学参数响应。结果表明: 脱离啮合现象的发生使齿轮副的啮合冲击更为显著, 共振状态下的最大应力值相比啮合频率为 3000 Hz 时增大了 20%。

关键词: 齿轮副; 扭转共振; 接触有限元法; 参数振动; 频谱分析; 频响分析

中图分类号: V233; TH132

文献标志码: A

Analysis of torsional resonance of gear pairs based on contact finite element method

FAN Jun¹, WANG Jian-jun¹, ZHANG Tao¹, XIAO Yang², CHEN Ce²

(1. School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. Helicopter and Engine Department, Army Aviation Institution, Beijing 101121, China)

Abstract: To simulate the continuous engagement of gear pair under resonance state, the contact finite element method was described and proved to be reasonable by comparing the meshing stiffness with national standard. The research object was a helical involute gear pair, the natural frequency of torsional vibration was got by spectral analysis method and frequency response analysis method. The occurrence, development and steady state of gear pair's torsional resonance were simulated numerically, and several dynamic parameters were analyzed quantitatively. The results showed that, the separation during the meshing process made the effect of meshing impact more significant. The maximum von-Mises stress increased by 20% compared with the value when the meshing frequency was 3000 Hz.

Key words: gear pair; torsional resonance; contact finite element method; parametric vibration; spectral analysis; frequency response analysis

随着现代工业的发展, 振动噪声水平成为衡量齿轮传动性能的重要指标^[1]。当齿轮副发生扭

转共振时, 系统振动迅速增大, 引起系统的振动噪声水平急剧恶化, 甚至导致疲劳破坏的发生, 研究

收稿日期: 2015-03-09

作者简介: 范俊(1982—), 男, 博士生, 主要从事航空发动机叶片轮盘拓扑优化设计研究。

通讯作者: 王建军(1956—), 男, 教授、博士生导师, 博士, 主要从事航空发动机结构与传动系统振动研究。E-mail: wangjianjun@buaa.edu.cn

引用格式: 范俊, 王建军, 张涛, 等. 基于接触有限元的齿轮副扭转共振分析[J]. 航空动力学报, 2017, 32(1): 162-167. FAN Jun, WANG Jianjun, ZHANG Tao, et al. Analysis of torsional resonance of gear pairs based on contact finite element method [J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(1): 162-167.

啮合齿轮副的共振响应对于传动系统的设计具有重要意义。

晏砺堂等^[2]指出由于存在轮齿啮合的力和位移约束条件,齿轮副共振响应不会无限制发展下去,Kahraman 等^[3-4]的实验结果也证实了该结论。但共振响应到底会发展到什么程度,目前的理论及数值研究还较为少见,这是由研究方法决定的。传统集中参数方法和有限元建模方法通过弹性元件来模拟齿轮副的啮合关系^[5-8],已经对系统的固有特性和响应特性进行了深入研究,这类方法更适用于分析远离共振区域的振动响应。当系统发生共振时,齿轮副啮合是一个连续动态过程,表现为啮合状态复杂多变,可能伴随着脱啮和双边接触等现象,而一般的弹性元件不能模拟这种动力学行为。

为仿真齿轮副的连续啮合过程,吴勇军等^[9-11]提出了一种基于接触有限元的分析方法,该方法能同时考虑时变啮合刚度、啮合冲击等因素的影响,可以高保真地模拟多种因素工作作用下的齿轮副啮合过程。张涛等^[12]基于这种方法对制造误差影响齿轮振动的机理进行了研究,进一步证明了该方法的合理性。

因此,本文将基于接触有限元方法对齿轮副扭转共振的连续啮合过程进行深入研究。首先概述了利用接触有限元法数值仿真齿轮副扭转共振的实施步骤。然后通过频谱分析方法和频响函数方法确定了啮合齿轮副扭转振动的固有频率。在此基础上对齿轮副的扭转共振状态进行了深入研究。最后讨论了影响齿轮副扭转振动固有频率的主要因素。

1 接触有限元建模及分析

基于接触有限元的齿轮副建模及连续啮合过程分析方法的详细叙述参见文献^[9-11],本节首先对其进行概述,然后着重阐述齿轮副扭转共振分析的关键点。

1.1 接触有限元建模

研究对象为渐开线斜齿轮副,主要几何参数见表 1,并且齿轮副内圈直径为 70 mm,材料为 45 号钢。由于齿轮副的接触有限元分析对建模精度要求较高,为避免建模的数值误差对仿真结果的影响,本文根据文献^[9]中所述的建模方法,在商用有限元软件 ANSYS 中利用 APDL(ANSYS parametric design language)语言直接进行几何建模及有限元网格划分工作,最终的啮合齿轮副有限元模型见图 1,共包括 81216 个实体单元和 1728 个

壳单元,节点数为 110448。转速和载荷施加方式同文献^[12],加载曲线见图 2,图 2(a)中纵坐标 ω/ω_r 为转速系数,其中 ω 为转速, ω_r 为额定转速。

表 1 斜齿轮副主要参数

Table 1 Main parameters of helical gear pair

齿数	模数/mm	压力角/(°)	齿宽/mm	螺旋角/(°)
36/36	3.18	20	25.4	20

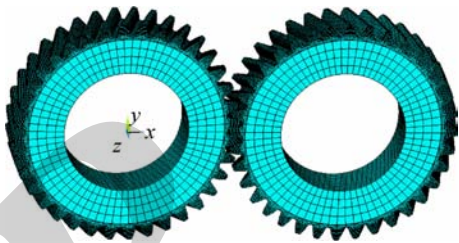


图 1 啮合齿轮副有限元模型

Fig. 1 Finite element model of engaged gear pair

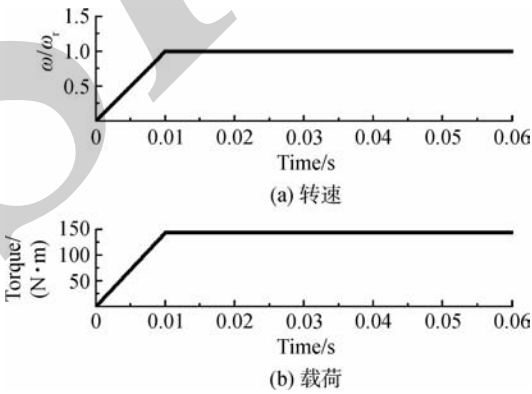


图 2 转速和载荷施加曲线

Fig. 2 Speed and load curves

1.2 啮合过程接触有限元分析

齿轮副啮合是连续的动态过程,前一时刻的响应决定下一时刻的激励,齿轮副的扭转共振会不断发展下去,当振动增大到一定程度时,受轮齿啮合边界条件的影响,这种振动会趋于稳定。

仿真齿轮副扭转共振的发生、发展和稳定的发展过程,关键在于要考虑轮齿啮合的边界条件对共振发展的抑制,而接触有限元法可以很好地解决这一问题。

1.2.1 动力学方程

将齿轮副扭转共振时的连续啮合过程从开始到稳态离散成时间序列 $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t + \Delta t, \dots, T$,采用更新拉格朗日格式的增量形式建立求解每一时刻的动力学方程,得到齿轮副共振过程每个时刻的动力学参数。

任意时刻齿轮副的运动方程^[9-12]为

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} + {}^t\mathbf{K}\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_l + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c - {}^t\mathbf{F} \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_g & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_p \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_g & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_p \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$${}^t\mathbf{K} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{K}_g & 0 \\ 0 & {}^t\mathbf{K}_p \end{bmatrix}$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}_g \\ {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix}; {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_g \\ {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix}; \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_g \\ \mathbf{u}_p \end{bmatrix} \quad (3)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_l = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_l^g \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_l^p \end{bmatrix}; {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^g \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^p \end{bmatrix}; {}^t\mathbf{F} = \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{F}^g \\ {}^t\mathbf{F}^p \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中下标 g, p 分别表示主、从动齿轮; $\mathbf{M}_g$ 和 $\mathbf{M}_p$ 分别是主、从动齿轮参考于初始时刻 $t=0$ s 的单元质量矩阵; $\mathbf{C}_g$ 和 $\mathbf{C}_p$ 分别是主、从动齿轮的单元阻尼矩阵; ${}^t\mathbf{K}_g$ 和 ${}^t\mathbf{K}_p$ 分别是主、从动齿轮的单元刚度矩阵, 由该时刻齿轮副的位置和形状所决定; ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}_g$ 和 ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}_p$ 分别是 $t+\Delta t$ 时刻的单元结点加速度向量; ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_g$ 和 ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_p$ 分别是 $t+\Delta t$ 时刻的单元结点速度向量; 而 $\mathbf{u}_g$ 和 $\mathbf{u}_p$ 是单元结点位移的增量向量, 即单元结点从 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻之间的位移增量; ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_l^g$ 和 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_l^p$ 为对应结点载荷向量; ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^g$ 和 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_c^p$ 为等效结点接触力向量; ${}^t\mathbf{F}^g$ 和 ${}^t\mathbf{F}^p$ 是 t 时刻的结点内力向量。

1.2.2 啮合约束条件

利用接触有限元分析方法模拟轮齿啮合对齿轮副扭转共振的抑制, 需要满足以下的约束条件^[13]:

1) 不可贯入性

不可贯入性是指轮齿 A 和轮齿 B 的位形 V^A 和 V^B 在运动过程中不允许相互贯穿^[13]. 为了满足这一要求, 设 $\mathbf{x}_P^A$ 为 S^A 面上任一指定点 P 在 t 时刻的坐标, 该点至 S^B 面最接近点 $Q(\mathbf{x}_Q^B)$ 的法向距离(见图 3)应满足

$${}^t g_n = g(\mathbf{x}_P^A, t) = (\mathbf{x}_P^A - \mathbf{x}_Q^B) \cdot \mathbf{n}_Q^B \geq 0 \quad (5)$$

式中 $g_n > 0$ 表示 P 点和 S^B 面分离, $g_n = 0$ 表示 P 点和 S^B 面接触。

2) 法向接触力为压力

在不考虑接触面间黏附的情况下, 轮齿间的法向接触力只可能是压力, 条件是

$${}^t F_n^A = -{}^t F_n^B \geq 0 \quad (6)$$

在求解动力学方程(式(1))的接触力时, 满足

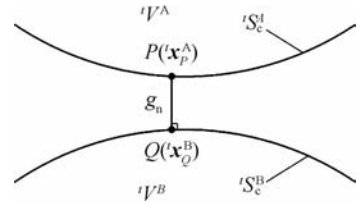


图 3 接触点对及点对间的距离

Fig. 3 Contact points pair and distance

式(5)和式(6)是进行齿轮副共振状态分析的关键。

1.3 接触有限元分析方法验证

为验证接触有限元分析方法的有效性, 对文中齿轮副的准静态啮合过程进行数值仿真, 通过分析轮齿的综合变形来计算齿轮副啮合刚度, 再与国家标准进行对比。

为模拟齿轮副的准静态啮合过程, 设置齿轮副转速为 60 r/min. 利用接触有限元方法对 0.05 s 内齿轮副啮合过程进行数值仿真, 得到从动轮的准静态传递误差(STE, 量符号记为 E_{st})如图 4 所示。

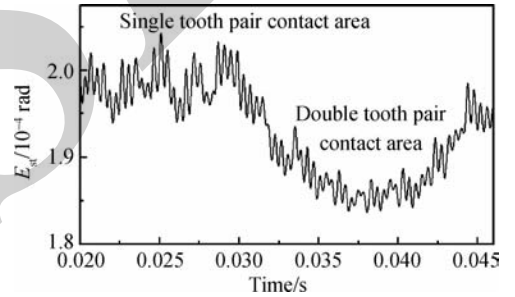


图 4 齿轮副静态传递误差

Fig. 4 Static transmission error of gear pair

取静态传递误差的均值 1.9×10^{-4} rad 作为齿轮副轮齿的综合弹性变形, 因此齿轮副的等效扭转刚度为

$$k_c = \frac{F}{x} = \frac{T}{\theta R_{bg}^2} = 2.326 \times 10^8 \text{ N/m} \quad (7)$$

需要指出, 静态传递误差反映的是周向方向上主动轮和从动轮的综合弹性变形之和; 啮合刚度反映的是齿轮沿啮合线方向的法向刚度. 因此啮合刚度 k_m 和等效扭转刚度 k_c 存在以下变换关系:

$$k_m = 2 \times k_c / (b \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta) = 20.7 \text{ N}/(\mu\text{m} \cdot \text{mm}) \quad (8)$$

其中 b 为齿宽, α 为压力角, β 为螺旋角。

由中国航空工业部标准^[14] (HB/Z84.1-1984) 得到啮合刚度为 $22.8667 \text{ N}/(\mu\text{m} \cdot \text{mm})$, 本文方法的计算结果偏小 9.5%. 一方面是因为接触有限元计算同时还考虑了轮齿啮合摩擦力和齿轮体扭转变形, 导致啮合刚度偏小; 另一方面,

相比有限元计算结果,弹性力学、ISO(International Organization for Standardization)标准等计算结果偏保守^[15].因此,利用接触有限元方法进行齿轮副啮合过程的仿真计算是合理可行的.

2 齿轮副扭转共振研究

下面对齿轮副的扭转共振进行研究.首先通过频谱分析方法和频响分析方法得到齿轮副的扭转共振的固有频率;然后对该激励频率下齿轮副的连续啮合过程进行数值仿真,通过分析各动力学参数来研究齿轮副在扭转共振状态下的典型动力学行为.

2.1 确定齿轮副扭转共振转速

1) 频谱分析方法

利用频谱分析方法确定固有频率,是由时变啮合刚度导致的参数振动特性决定的^[16-17].王建军等^[17]指出参数振动系统在外界激励下响应的频率成分组成如式(9),不仅包括激励频率(啮合频率),还包括固有频率.对本文所研究的厚腹板斜齿轮副齿轮副而言,固有频率是指扭转共振频率.

$$f_n^c = |\omega_d + n\bar{\omega}|$$

(9)

(n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)

利用频谱分析方法的主要实施步骤为:首先设置主动轮输入转速为 3 666.7 r/min,此时的啮合频率为 2 200 Hz;然后对该转速下的齿轮副啮合过程进行仿真,提取稳态阶段各动力学参数的时域响应信号;最后利用快速傅里叶变换(FFT)进行频谱分析得到响应的频率成分,并确定扭转共振的固有频率.

图 5(a)和图 5(b)分别为齿轮副啮合力的时域响应及频谱曲线图.图 6(a)和图 6(b)分别从动轮的角速度时域响应图和角速度偏差频谱曲线.

由图 6(a)可以看出,在 0~0.01 s,系统处在加速状态,因此图 5(a)中的接触力响应在该区间较大.当输入转速不变时,各动力学响应也就区域稳态.由图 5(b)和图 6(b)看出,啮合齿轮副响应的主要频率成分包括 2 200 Hz 和 2 400 Hz,其中前者为系统的激励频率即啮合频率,后者为齿轮副扭转共振的固有频率.

2) 频响分析方法

为进一步验证齿轮副扭转振动的固有频率,本文计算了不同转速下的振动响应幅值,并绘制了频响曲线.

设置啮合频率为 1 800, 2 200, 2 300, 2 400,

2 500, 2 600 Hz 和 3 000 Hz,提取在各转速下的接触力响应和从动轮角速度响应,得到相应的频响曲线见图 7(a)和图 7(b).

由图 7 可知,系统响应受转速变化的影响显著.当啮合频率为 2 400 Hz 时,系统的动态接触力和角速度偏差振动幅值均达到最大,并且越是远离该频率,振动幅值越小.通过该曲线可以进一步确定第 1 章中所建立啮合齿轮副模型的扭转振动的固有频率在 2 400 Hz 左右.

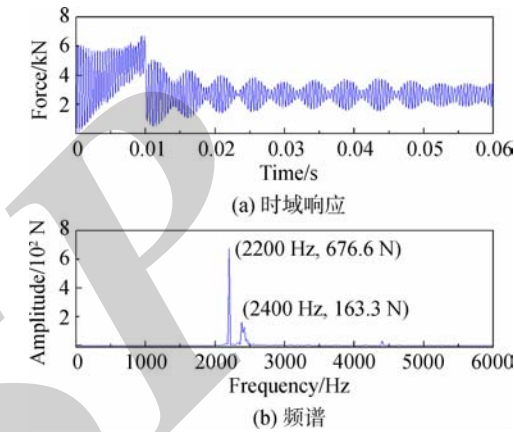


图 5 接触力时域及频域响应
Fig. 5 Time and frequency domain response of contact force

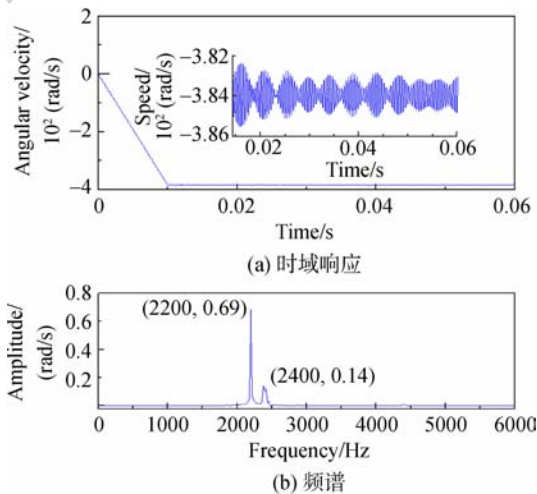


图 6 角速度时域及频域响应
Fig. 6 Time and frequency domain response of angular velocity

2.2 齿轮副扭转共振响应分析

通过第 2.1 节分析得到了齿轮副扭转振动的固有频率.调整主动轮转速,使相应的啮合频率与固有频率一致(2 400 Hz),此时系统发生共振.下面对齿轮副扭转共振状态下的动力学行为进行分析.

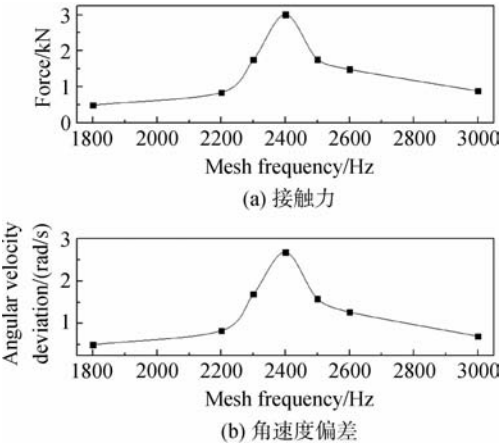


图 7 各动力学参数频响曲线

Fig. 7 Frequency response curves of dynamic parameters

图 8(a)和图 8(b)为共振状态时的接触力响应和从动轮角速度响应,其中前者的波动区间为 0~6 kN,后者的波动区间为-422~-416 rad/s,两者的振动幅值相对于非共振状态下(图 5 和图 6)均有大幅度增加.但受轮齿啮合的影响,共振发展到一定程度后趋于稳定.各动力学参数振动幅值的增大表明系统振动水平急剧恶化.

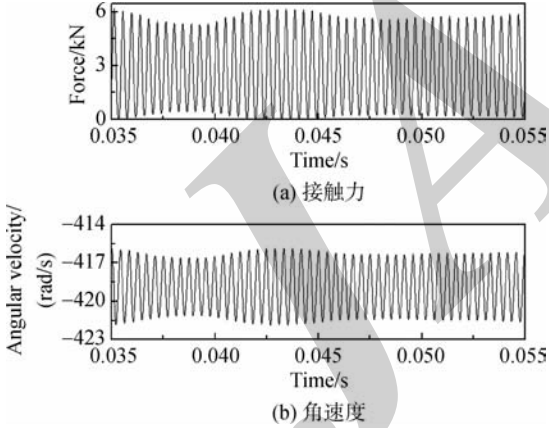


图 8 共振状态动力学参数时域响应

Fig. 8 Time domain response of dynamic parameters under resonance state

图 9 和图 10 为啮合力最小和最大时的系统应力分布图.需要指出,对啮合齿轮副而言,主动轮与从动轮的受力关系为作用力和反作用力,两者整体上的 von-Mises 应力分布大致相同,为方便查看,本文只给出了主动轮的受力分布.在图 9 时刻的啮合力为 0 N,即齿轮副脱离啮合,轮齿不再传递动力导致系统最大应力点位于齿轮内缘.脱离啮合后,齿轮副会再次进入啮合状态,受这种啮合冲击的影响,齿轮副的啮合力和齿轮应力迅速增大,轮齿处最大应力值为 153.9 MPa,如图 10

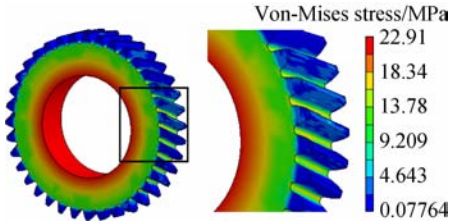


图 9 脱啮时主动轮应力分布云图

Fig. 9 Von-Mises stress distribution of driving gear while lose contact

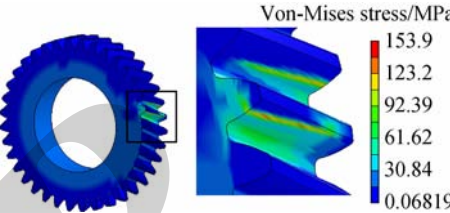


图 10 啮合力最大时主动轮应力分布云图

Fig. 10 Von-Mises stress distribution of driving gear with largest contact force

所示.相比啮合频率为 3 000 Hz 时最大应力值增大了 20%,说明齿轮副扭转共振还会引起轮齿应力的增加.

因此,齿轮副扭转共振对系统响应的影响表现在两个方面.一是系统各动力学参数振动幅值增大,如角速度波动非常剧烈并影响传动的稳定性;二是齿轮副最大啮合力的增大导致轮齿最大应力增加,使系统发生疲劳损伤的概率变大.

2.3 腹板厚度对共振转速的影响

文献[18]指出,影响齿轮副等效扭转固有频率的主要因素为轮齿啮合刚度及齿轮副等效质量,前者由系统工作参数决定,后者主要受几何参数的影响,下面简单分析齿轮腹板厚度对齿轮副共振转速的影响.

保持齿轮内径(40 mm)和轮缘内径(110 mm)等几何参数不变,设置腹板厚度为 16.4,19.4,22.4 和 25.4 mm,利用第 2.1 节的方法求解不同腹板厚度下的固有频率变化趋势见图 11.

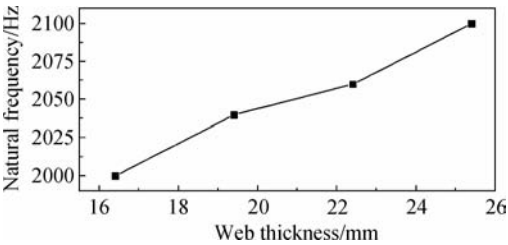


图 11 腹板厚度对固有频率的影响

Fig. 11 Influence of web thickness on natrual frequency

图 11 表明,随着腹板厚度的增大,齿轮副扭转振动固有频率随之增大.这是因为腹板厚度的增大增强了轮齿啮合刚度,虽然齿轮副等效质量有所增加但由于幅度较小,齿轮副固有频率还是表现为增大.

3 结 论

通过上述研究,可以得到以下结论:

1) 利用接触有限元分析方法能够对齿轮副扭转共振时连续动态的啮合过程进行仿真,包括共振的产生、发展和稳态;

2) 当齿轮副发生扭转共振后,各动力学参数振幅迅速增大;受轮齿啮合约束的影响,增大至一定程度后趋于稳定;

3) 齿轮副处于共振状态时不仅会增大系统振动,如角速度波动加剧,还会导致轮齿最大应力增加;

4) 当轮齿参数不变时,腹板厚度对齿轮副的固有频率影响显著.

限于篇幅,还可以将本文的分析方法应用到航空薄壁齿轮的共振分析,对传动系统的故障诊断具有重要意义.

参考文献:

[1] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学:振动、冲击、噪声[M]. 北京:科学出版社,1997.

[2] 晏砺堂,朱梓根,李其汉. 高速机械旋转振动[M]. 北京:国防工业出版社,1994.

[3] Kahraman A, Blankenship G W. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters[J]. Journal of Applied Mechanics, 1997, 64(1): 217-226.

[4] Kubur M, Kahraman A, Ziniet D M et al. Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements; model and experiment[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2004, 126(3): 398-406.

[5] 王建军,李润方. 齿轮系统动力学的理论体系[J]. 中国机械工程, 1998, 9(12): 61-64.

WANG Jianjun, LI Runfang. Theoretical system of gear dynamics[J]. China Mechanical Engineering, 1998, 9(12): 61-64. (in Chinese)

[6] 李明,孙涛,胡海岩. 齿轮传动转子-轴承系统动力学的研究进展[J]. 振动工程学报, 2002, 15(3): 5-12.

LI Ming, SUN Tao, HU Haiyan. Review on dynamics of geared rotor-bearing systems[J]. Journal of Vibration Engineering, 2002, 15(3): 5-12. (in Chinese)

[7] WANG Jianjun, LI Runfang, PENG Xianghe. Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems[J]. Applied Mechanics Reviews, 2003, 56(3): 309-329.

[8] 王建军,李其汉,李润方. 齿轮系统非线性振动研究进展[J]. 力学进展, 2005, 35(1): 37-51.

WANG Jianjun, LI Qihan, LI Runfang. Research advances for nonlinear vibration of gear transmission systems[J]. Advances in Mechanics, 2005, 35(1): 37-51. (in Chinese)

[9] 吴勇军,王建军. 一种考虑齿轮副连续啮合过程的接触有限元动力学分析方法[J]. 航空动力学报, 2013, 28(5): 1192-1200.

WU Yongjun, WANG Jianjun. A contact finite element method for dynamic analysis of continuous engaged gear pairs[J]. Journal of Aerospace Power, 2013, 28(5): 1192-1200. (in Chinese)

[10] WU Yongjun, WANG Jianjun, HAN Qinkai. Contact finite element method for dynamic meshing characteristics analysis of continuous engaged gear drives[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2012, 26(6): 1671-1685.

[11] WU Yongjun, WANG Jianjun, HAN Qinkai. Static/dynamic contact FEA and experimental study for tooth profile modification of helical gears[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2012, 26(5): 1409-1417.

[12] 张涛,吴勇军,吴静,等. 制造误差影响齿轮副啮合的接触有限元分析方法[J]. 振动与冲击, 2015, 34(3): 43-50.

ZHANG Tao, WU Yongjun, WU Jing, et al. Analysis of machining errors' effects on gear pair meshing using contact finite element method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(3): 43-50. (in Chinese)

[13] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.

[14] 中华人民共和国航空工业部. HB/Z 84. 1-1984 航空渐开线圆柱齿轮承载能力一般系数计算[S]. 北京:国防科学技术工业委员会, 1986: 23-25.

[15] 周长江,唐进元,吴运新. 齿根应力与轮齿弹性变形的计算方法进展与比较研究[J]. 机械传动, 2004, 28(5): 1-6.

ZHOU Changjiang, TANG Jinyuan, WU Yunxin. The comparative study of the bending stress and elastic deformation calculation of gear tooth[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2004, 28(5): 1-6. (in Chinese)

[16] 王建军,高雄兵,李其汉. 单自由度参数振动系统非线性响应的若干特征[J]. 应用力学学报, 2003, 20(2): 147-151.

WANG Jianjun, GAO Xiongbing, LI Qihan. Some characteristics of nonlinear response for single-degree of freedom of parametric vibration system[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2003, 20(2): 147-151. (in Chinese)

[17] 王建军,韩勤锴,李其汉. 参数振动系统响应的频谱成分及其分布规律[J]. 力学学报, 2010, 42(3): 535-540.

WANG Jianjun, HAN Qinkai, LI Qihan. Spectral components and their distributions of the response for parametric vibration system[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, 42(3): 535-540. (in Chinese)

[18] 吴勇军,梁跃,杨燕,等. 齿轮副动态啮合特性的接触有限元分析[J]. 振动与冲击, 2012, 31(19): 61-67.

WU Yongjun, LIANG Yue, YANG Yan, et al. Dynamic meshing characteristics study of gear pairs using contact finite element analysis method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(19): 61-67. (in Chinese)